3 Granična vrednost i neprekidnost funkcija

3.1 Granična vrednost funkcije u tački

Neka je funkcija $f(x)$ definisana u tačkama x za koje je $0 < |x - x_0| < r$, ili drugim rečima, za sve vrednosti u intervalu $(x_0 - r, x_0 + r)$ sem, eventualno, u samoj tački x_0, u kojoj može, ali ne mora biti definisana. Broj $b \in R$ je *granična vrednost* funkcije $f(x)$ u tački x_0 ako i samo ako za svaki broj $\epsilon > 0$ postoji broj $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ takav da je

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon.$$

U tom slučaju se piše

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b$$

ili

$$f(x) \to b \quad (x \to x_0).$$

Posmatrajmo sada funkciju $f(x)$ samo sa jedne strane tačke x_0, i to najpre sa leve, odnosno za vrednosti nezavisno promenljive manje od x_0. Neka je, dakle, funkcija $f(x)$ sada definisana za x za koje je $r < x < x_0$, odnosno u intervalu $(x_0 - r, x_0)$. Broj $b_1 \in R$ je *leva granična vrednost* funkcije $f(x)$ u tački x_0 ako i samo ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tako da

$$x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - b_1| < \epsilon.$$

To se označava sa

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = b_1 = f(x_0 - 0).$$

Analogno, funkcija $f(x)$ se može posmatrati i samo sa desne strane tačke x_0, odnosno za vrednosti nezavisno promenljive veće od x_0. Naime, ako je $f(x)$ definisana za $x_0 < x < r$, odnosno u intervalu $(x_0, x_0 + r)$, tada je $b_2 \in R$ *desna granična vrednost* funkcije $f(x)$ u tački x_0 ako i samo ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0 = \delta(\epsilon) > 0$ tako da

$$x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - b_2| > \epsilon$$

što se označava sa

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = b_2 = f(x_0 + 0)$$

Primer 11 *Posmatrajmo funkciju $f(x) = [x]$ koja svakom realnom broju dodeljuje najveći ceo broj koji nije veći od x. Na primer, $[1,0001] = 1$, $[0,9999] = 0$, itd. Za ovu funkciju u tački $x_0 = 1$ postoje leva i desna granična vrednost koje se međusobno razlikuju. Naime, leva granična vrednost $f(1-0) = 0$, dok je desna granična vrednost $f(1+0) = 1$. Funkcija je, inače, definisana i za $x_0 = 1$ i jednaka desnoj graničnoj vrednosti, naime $f(1) = 1$.*

Ako funkcija u tački ima graničnu vrednost, onda ima i levu i desnu i one su jednake. I obrnuto, ako funkcija u tački ima levu i desnu graničnu vrednost i one su jednake, onda ima i graničnu vrednost u toj tački. Dakle, iz egzistencije $\lim_{x\to x_0} f(x)$ sledi egzistencija $f(x_0-0)$ i $f(x_0+0)$, kao i $f(x_0-0) = f(x_0+0)$. Takođe, ako postoje $f(x_0-0)$ i $f(x_0+0)$ i ako je $f(x_0-0) = f(x_0+0)$ tada postoji $\lim_{x\to x_0} f(x)$ i

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0-0) = f(x_0+0)$$

Drugim rečima, potreban i dovoljan uslov da postoji $\lim_{x\to x_0} f(x)$ jeste da postoji $f(x_0-0)$ i $f(x_0+0)$ i da je $f(x_0-0) = f(x_0+0)$.

Funkcije koje nemaju graničnu vrednost $b \in R$ u tački x_0, slično kao i nizovi koji nisu konvergentni, mogu u toj tački određeno da divergiraju, odnosno teže beskonačnosti. Naime, ako je funkcija $f(x)$ definisana u oblasti $0 < |x-x_0| < r$, ako je u nekoj okolini tačke x_0 (osim možda u x_0) pozitivna, dakle $f(x) > 0$, i ako je pri tome granična vrednost

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$$

tada kažemo da u tački x_0 funkcija $f(x)$ određeno divergira ka $+\infty$ i pišemo

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty.$$

Analogno, ako je funkcija $f(x)$ definisana u oblasti $0 < |x-x_0| < r$, ako je u nekoj okolini tačke x_0 (osim možda u x_0) negativna, dakle $f(x) < 0$, i ako je pri tome granična vrednost

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$$

tada kažemo da u tački x_0 funkcija $f(x)$ određeno divergira ka $-\infty$ i pišemo

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

Na sličan način i leva i desna granična vrednost funkcije mogu određeno da divergiraju ka $+\infty$ ili $-\infty$, naime postoje

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = -\infty$$

Primer 12 *Za funkciju* $y = \frac{1}{x}$ *u tački* $x_0 = 0$ *važi*

$$\lim_{x\to -0} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to +0} \frac{1}{x} = +\infty$$

a za funkciju $y = \frac{1+x}{1-x}$ *u tački* $x_0 = 1$

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{1+x}{1-x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{1+x}{1-x} = -\infty.$$

Granična vrednost funkcija može se definisati i za slučaj kada $x \to \pm\infty$. Naime, ako je funkcija definisana na $[r, +\infty)$ $(r \in R)$ tada je

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = b$$

ako i samo ako je

$$\lim_{t\to +0} f(\frac{1}{t}) = b$$

Analogno,

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = b$$

ako i samo ako je

$$\lim_{x\to -0} f(\frac{1}{t}) = b$$

Primer 13 *Posmatrajmo funkciju* $y = \frac{2-3x}{x-2}$ *kada* $x \to -\infty$. *Tada je*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2-3x}{x-2} = -3$$

jer je

$$\lim_{t\to-0} \frac{2-\frac{3}{t}}{\frac{1}{t}-2} = \lim_{t\to-0} \frac{2t-3}{1-2t} = -3.$$

Granična vrednost funkcije u tački x_0 može se definisati i preko nizova, naime: funkcija $f(x)$ ima graničnu vrednost b kada $x \to x_0$ (gde x_0 može biti i ∞) ako i samo ako za svaki niz $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ važi $f(x_n) \to b$ $(n \to \infty)$.

Primer 14 *Prethodna definicija može se iskoristiti da se pokaže da ne postoji*

$$\lim_{x\to\infty} sinx.$$

Naime, za niz $x_n = 2n\pi$ *važi*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

pa kako je $\sin 2n\pi = 0$, *to je*

$$\lim_{n\to x_0} \sin x_n = 0.$$

Sa druge strane za niz $x'_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ *takođe važi*

$$\lim_{n\to\infty} x'_n = +\infty$$

pri čemu je $\sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1$, *pa je stoga*

$$\lim_{n\to\infty} \sin x'_n = 1$$

odakle, budući da su granične vrednosti funkcije $y = sinx$ *za nizove* x_n *i* x'_n *koji oba teže* $+\infty$ *različite, prema prethodnoj definiciju sledi da granična vrednost funkcije* $y = sinx$ *kada* $x \to \infty$ *ne postoji.*

Za granične vrednosti dve funkcije važi da ako je

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = b_1$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = b_2$$

onda je:

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = b_1 \pm b_2$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = b_1 \cdot b_2$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b_1}{b_2}, \ akoje \ \ b_2 \neq 0.$$

3.2 Tablica osnovnih graničnih vrednosti

Ovde ćemo navesti, bez dokaza, nekoliko graničnih vrednosti, koje ćemo nadalje smatrati za poznate.

Pre svega, granična vrednost niza

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

može se uopštiti na realne funkcije, pa je

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e.$$

Navešćemo i nekoliko graničnih vrednosti za funkcije tipa $\frac{f(x)}{g(x)}$ za koje je granična vrednost $g(x) = 0$, a to su sledeće

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \qquad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a \qquad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \qquad (\alpha \in R).$$

3.3 Neprekidnost funkcija

Neka je funkcija $f(x)$ definisana u tački x_0 i nekoj njenoj okolini. Funkcija $f(x)$ je *neprekidna u tački* x_0 ako i samo ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ takvo da važi

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0) < \epsilon|.$$

Neprekidnost se može definisati i pomoću granične vrednosti. Naime, funkcija $f(x)$ je neprekidna u tački x_0 ako i samo ako u toj tački ima graničnu vrednost i ako je pri tome

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Ako je funkcija neprekidna u svakoj tački intervala (a, b) kaže se da je neprekidna u intervalu (a, b).

Ako je funkcija definisana u tački x_0 i ako ima desnu graničnu vrednost $f(x_0 + 0)$ i ako je pri tome $f(x_0) = f(x_0 + 0)$ onda je funkcija *neprekidna*

sdesna u tački x_0. Analogno, ako je funkcija definisana u tački x_0 i ima levu graničnu vrednost $f(x_0-0)$ i ako je $f(x_0)=f(x_0-0)$ funkcija je *neprekidna sleva* u tački x_0. Potreban i dovoljan uslov da je funkcija neprekidna u tački x_0 je da je neprekidna sleva i neprekidna sdesna.

Ako funkcija $f(x)$ u tački x_0 nije neprekidna kaže se da u toj tački ima *prekid*. Ako postoje $f(x_0-0)$ i $f(x_0+0)$ prekid je *prve vrste*, a u protivnom prekid je *druge vrste*. Prekid prve vrste kada je $f(x_0-0)=f(x_0+0)$ naziva se *otklonjiv* prekid.

Primer 15 *Funkcija* $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ *u tački* $x_0=0$ *ima otklonjiv prekid. Naime, u toj tački leva i desna granična vrednost su jednake, jer funkcija ima graničnu vrednost jednaku*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Prekid nastaje jer funkcija nije definisana za $x=0$*. Ako se funkcija definiše tako da je njena vrednost u* 0 *jednaka* $f(0)=1$*, onda ona postaje neprekidna u* 0*, dakle prekid je "otklonjen".*

Ako su funkcije f i g neprekidne u tački x_0 onda su neprekidne i funkcije $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, kao i funkcija $\frac{f}{g}$, ali samo pod uslovom da je $g(x_0)\neq 0$.

Ako je $f(x)$ neprekidna u x_0, a $g(y)$ neprekidna u $y_0=f(x_0)$, onda je $g(f(x))$ neprekidna u x_0. Ako je $g(y)$ neprekidna funkcija, onda je

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x_0))=g(\lim_{x\to x_0} f(x)).$$