

IZVOD FUNKCIJE

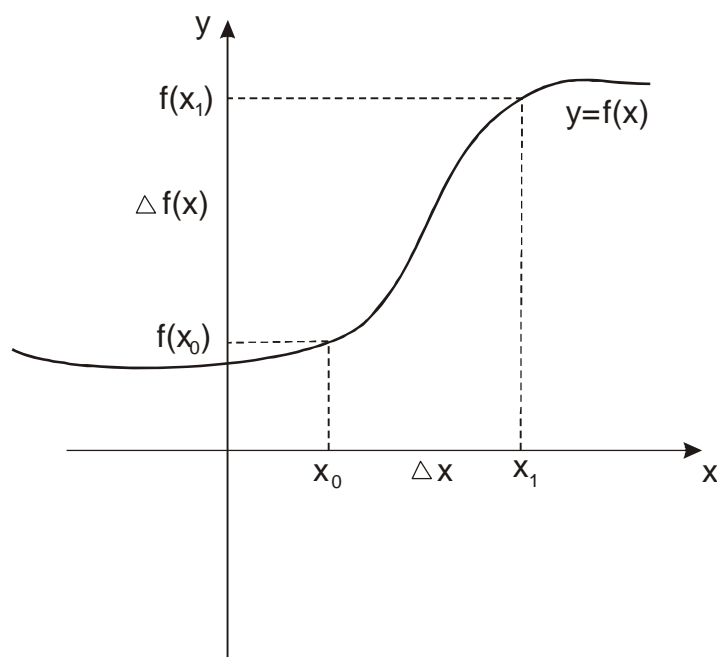
Predpostavimo da je funkcija $f(x)$ definisana u nekom intervalu (a,b) i da je tačka x_0 iz intervala (a,b) fiksirana.

Uočimo neku proizvoljnu tačku x_1 iz tog intervala (a,b) . Ova tačka x_1 može da se pomera levo desno, pa ćemo je zvati promenljiva tačka intervala (a,b) . Razlika $x_1 - x_0$ pokazuje promenu ili priraštaj vrednosti nezavisno promenljive x i najčešće se obeležava sa $\Delta x = x_1 - x_0$

Razlika $f(x_1) - f(x_0)$ predstavlja odgovarajuću promenu ili priraštaj funkcije $f(x)$ i obično se obeležava sa

$\Delta f(x) = f(x_1) - f(x_0)$ ili ako je funkcija označena sa $y=f(x)$ može se zapisati: $\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$.

Evo kako bi to izgledalo na slici:



Količnik $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ naziva se srednjom ili prosečnom brzinom promene funkcije u intervalu $[x_0, x_1]$

Razmišljamo šta će se dešavati kada se tačka x_1 približava tački x_0 ? (to jest kad x_1 teži x_0)

Ako ta granična vrednost postoji normalno je da nju uzmemo za brzinu promene funkcije u tački x_0 .

Brzina promene funkcije $f(x)$ u tački x_0 u matematici se naziva **IZVOD** funkcije i obeležava se sa :

$f'(x_0)$ ili sa y' . Dakle **definicija izvoda je :**

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

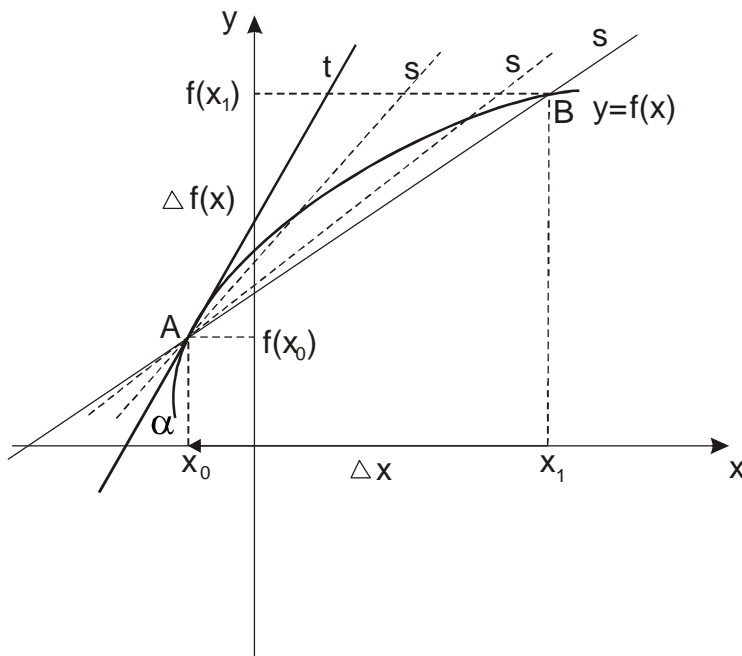
Često se umesto tačke x_0 jednostavno stavlja x pa izvod onda glasi:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Rečima ova **definicija** bi glasila:

Izvod funkcije jednak je graničnoj vrednosti količnika priraštaja funkcije i priraštaja nezavisno promenljive, kad priraštaj nezavisno promenljive teži nuli.

Geometrijska interpretacija izvoda



Posmatrajmo sečicu S koja prolazi kroz tačke $A(x_0, f(x_0))$ i $B(x_1, f(x_1))$. U situaciji kada se Δx smanjuje, odnosno x_1 se sve više približava tački x_0 , ona sve manje i manje seče datu krivu $y=f(x)$ dok u jednom graničnom trenutku ne **postane tangenta t te krive!**

Tada količnik priraštaja funkcije i priraštaja nezavisno promenljive $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ predstavlja koeficijent pravca k , to jest tangens ugla koji tangenta zaklapa sa pozitivnim smerom x ose.

Dakle: **VREDNOST PRVOG IZVODA U TOJ TAČKI JE : $y' = \operatorname{tg} \alpha = k$**

TABLICA IZVODA

1. $C' = 0$

2. $x' = 1$

3. $(x^2)' = 2x$

4. $(x^n)' = nx^{n-1}$

5. $(a^x)' = a^x \ln a$

6. $(e^x)' = e^x$

7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

8. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

9. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

10. $(\sin x)' = \cos x$

11. $(\cos x)' = -\sin x$

12. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

13. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

14. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

16. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

17. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

PRAVILA ZA IZVODE

1. $[cf(x)]' = cf'(x)$

Kad je konstanta vezana za funkciju, nju prepisemo a tražimo izvod samo od funkcije. A kad je konstanta sama, izvod od nje je 0.

2. $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$ Od svakog sabirka tražimo izvod posebno.

3. $(u \circ v)' = u'v + v'u$ izvod proizvoda

4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ izvod količnika

5. $f[g(x)]' = f'[g(x)] \circ g'(x)$ izvod složene funkcije

Izvod funkcije u parametarskom obliku

Ako je funkcija zadata parametarski $x=x(t)$ i $y=y(t)$ prvi izvod tražimo:

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'}$$

Izvod implicitno zadate funkcije

Kada je funkcija $y=f(x)$ zadata u implicitnom obliku $F(x,y) = 0$, njen prvi izvod dobijamo iz relacije:

$$\frac{d}{dx} F(x,y) = 0$$

Izvodi višeg reda

$y'' = (y')'$ \longrightarrow drugi izvod je prvi izvod prvog izvoda

$y''' = (y'')'$ \longrightarrow treći izvod je prvi izvod drugog izvoda

 $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$ \longrightarrow n-ti izvod je prvi izvod (n-1)-vog izvoda

Jednačina tangente

Jednačina tangente na krivu $y=f(x)$ u tački (x_0, y_0) u kojoj je funkcija diferencijabilna, računa se po formuli:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Jednačina normale

Normala na krivu $y=f(x)$ u tački (x_0, y_0) je prava normalna na tangentu krive u toj tački. Njena jednačina je :

$$y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)} (x - x_0)$$

Diferencijal

Ako je funkcija $y=f(x)$ diferencijabilna u tački x , tada je $\Delta y = y' \Delta x + o(\Delta x)$ kada $\Delta x \rightarrow 0$

Glavni deo $y' \Delta x$ priraštaja Δy vrednosti funkcije nazivamo diferencijalom funkcije $y=f(x)$.

Specijalno za $y = x$ važi da je $dx = x' \Delta x = 1 \Delta x = \Delta x$, pa je:

$$dy = y' dx \quad \text{tj.} \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

